3) Έστω $f, g : A \to B$ δύο συναρτήσεις
Αν $f \subseteq g$ νδο $f = g$.

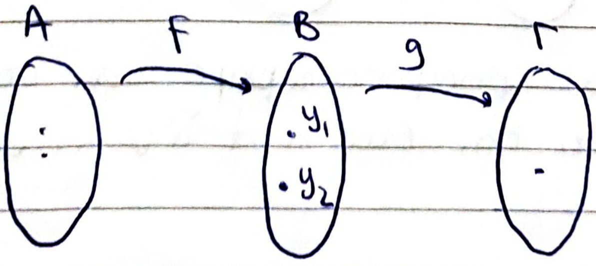
Απόδ

Αρχικά νδο $g \subseteq f$. Έστω $(x,y) \overset{(1)}{\in} g$. Εφόσον $g \subseteq A \times B$ έχουμε $x \in A$ (και $y \in B$)

Εφόσον η $f$ είναι συνάρτηση από το $A$ στο $B$ υπάρχει $z \in B$ ώστε $(x,y) \underset{(3)}{\in} f$. Έτσι εφόσον $f \subseteq g$ προκύπτει ότι $(x,z) \in g$ (2).
Εφόσον η $g$ είναι συνάρτηση, από τις (1),(2) προκύπτει ότι $y = z$
Εφόσον $(x,y) \in f$, από την (3) προκύπτει ότι $(x,y) \in f$
Επομένως $g \subseteq f$. Και άρα $f = g$.

4) $f : A \to B$ $g : B \to \Gamma$ δύο συναρτήσεις
α) Αν η $f$ είναι επί και η $g \circ f$ είναι 1-1 νδο η $g$ είναι 1-1.
β) Να δειχθεί (με κατάλληλο αντιπαράδειγμα) ότι η υπόθεση ότι η $f$ είναι επί στο προηγ. ερώτημα δεν μπορεί να παραλειφθεί.

Απόδ
α)

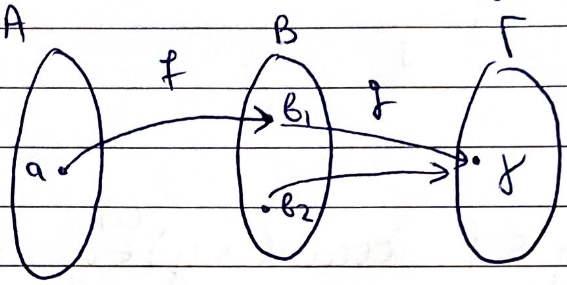



Έστω $y_1, y_2 \in B$ ώστε $g(y_1) = g(y_2)$. Εφόσον η $f$ είναι επί υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ τ.ω. $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$. Έτσι $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ δηλ. $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Εφόσον

Ασκ ΦΛ.#5

η gof είναι 1-1 προκύπτει ότι $x_1=x_2$. Άρα $f(x_1)=f(x_2)$
δηλ. $y_1=y_2$. Αποδείξαμε ότι η g είναι 1-1.

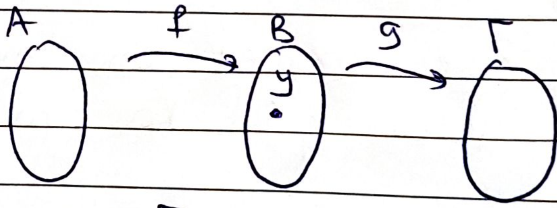
β)




Η gof είναι 1-1 αλλά η g δεν είναι 1-1.

$A=\{a\}$ $\quad f(a)=b_1$
$B=\{b_1,b_2\}$ $\quad g(b_1)=g(b_2)=\gamma$.
$\Gamma=\{\gamma\}$.

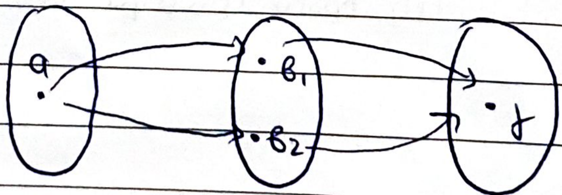
Α5 / ΦΛ.#5




Απόδειξη

α) Θεωρώ $y\in B$. Τότε $g(y)\in\Gamma$.
Επειδή η gof είναι επί, $\exists x\in A$ τ.ω. $\cancel{g(f(x))=g(y)}$.
δηλ. $(g\circ f)(x)=g(y)$.
Αφού g 1-1, έχω ότι $f(x)=y$. Επομένως η f είναι επί.

β)




Το παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε και στην προηγούμενη άσκηση. Η gof είναι επί ενώ η f δεν είναι επί.

<u>Άρα</u> $\left| \begin{array}{l} x \geq \frac{25}{8} \quad \text{ή} \quad x \leq \frac{23}{8} \\ \\ 2 < x < 4 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow x \in \left(2, \frac{23}{8}\right] \cup \left[\frac{25}{8}, 4\right)$.

(ii) $X = (-\infty, 4]$
$f(x) = [0, +\infty)$
$x \in f^{-1}((-\infty, 4])$
$\Leftrightarrow f(x) \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x-3| \leq 2$
$\Leftrightarrow 2|x-3| \leq 4$

$-2 \leq x-3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, 4]) = [1, 5]$

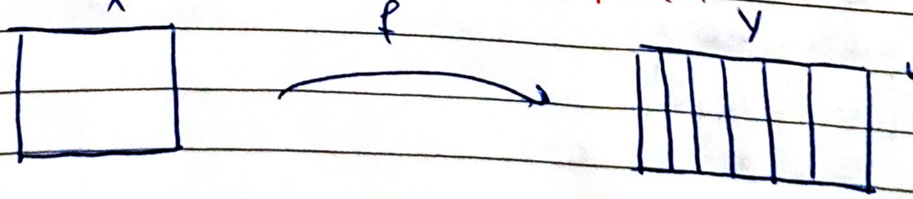
(iii) Για $X = (0, +\infty)$ είχαμε βρει ότι $f(x) = [0, +\infty)$.

$x \in f^{-1}((0, +\infty)) \Leftrightarrow f(x) > 0$
άρα $f^{-1}((0, +\infty)) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $\quad 2|x-3| > 0 \Rightarrow x \neq 3$.

Α8 ερ#5

Διαμέριση → σπάω το διάστημα σε κομμάτια

<u>Αποδ</u>




a) Για κάθε $i \in I$ $f^{-1}(B_i) \neq \emptyset$.
Απ. έστω $i \in I$. Επειδή $B_i \neq \emptyset$ υπάρχει $y \in B_i$. Επειδή η $f$ είναι επί υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) = y$ έτσι $f(x) \in B_i$ δηλ. $x \in f^{-1}(B_i)$

Α1 | [illegible]

α) Επειδή $f(2)=2|2-3|=2|-1|=2\cdot 1=2$

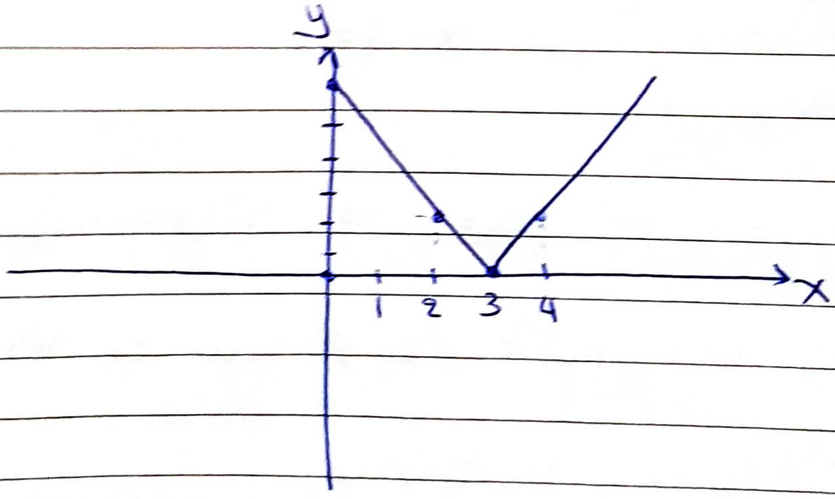
$f(4)=2|4-3|=2|1|=2\cdot 1=2$

Άρα $f(2)=f(4)$. Συνεπώς $f$ δεν είναι 1-1.

Δεν υπάρχει $x$ τ.ω. $f(x)=-1$. Άρα η $f$ δεν είναι επί.

$$f(x)=\begin{cases} 2(x-3), & x\geq 3 \\ 2(3-x), & x<3 \end{cases}$$

Άρα:




ii) $\frac{1}{4}\leq x<2$

$\Leftrightarrow -4<-2x\leq 1/2$

$\Leftrightarrow 2<6-2x\leq 11/2$ $\qquad f(x)=\left(2,\frac{11}{2}\right]$

διότι ~~x~~ $x=3$.

$f(x)\in[1/4,2)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\leq 2|x-3|<2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8}\leq |x-3|<1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8}\leq |x-3|$ και $|x-3|<1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\geq \frac{1}{8} \text{ ή } x-3\leq \frac{1}{8} \\ -1<x-3<1 \end{cases}$

No. Date

γ) Προφανώς $\bigcup_{i\in I} f(A_i) \subseteq Y$.

Αντίστροφα, αν $y\in Y$. Εφόσον η $f$ είναι επί, υπάρχει $x\in X$ $f(x)=y$. Εφόσον $X=\bigcup_{i\in I} A_i$ υπάρχει $i\in I$ $x\in A_i$ άρα

$y=f(x)\in f(A_i)$

"Ακέραιοι Αριθμοί"

Ορίζουμε $\mathbb{Z} = \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{x\in\mathbb{R} \quad -x\in\mathbb{N}\}$
$= \mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n \quad n\in\mathbb{N}\}$
το σύνολο των ακεραίων

Παρατήρηση: Έστω $z\in\mathbb{R}$ τότε
$z\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists\, x,y\in\mathbb{N}$ ώστε $z=x-y$

Αποδ
$\Rightarrow$) Έστω $z\in\mathbb{Z}$
α) Αν $z\in\mathbb{N}$ : $z=(z+1)-1$ όπου $z+1, 1\in\mathbb{N}$.

β) $z=0$
$z=1-1$

γ) $z=-n$, $n\in\mathbb{N}$
$z=n-2n$ όπου $n, 2n\in\mathbb{N}$.
$\Leftarrow$) Αν $z=x-y$ με $x,y\in\mathbb{N}$.
α) Αν $x>y$ τότε $x-y\in\mathbb{N}$ άρα $z\in\mathbb{Z}$
β) Αν $x=y$, τότε $z=0$ άρα $z\in\mathbb{Z}$
γ) Αν $x<y$, τότε $y-x\in\mathbb{N}$, άρα $z=x-y=-(y-x)\in\mathbb{Z}$
(ως αντίθετος φυσικού).

β) Έστω $i,j \in I$ με $i \neq j$ $f^{-1}(B_i) \cap f^{-1}(B_j) =$
$= f^{-1}(B_i \cap B_j) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

γ) δ.δ.ο $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$. Προφανώς $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \subseteq X$.
Αντίστροφα έστω $x \in X$, τότε $f(x) \in Y$ και υπάρχει $i \in I$ ώστε $f(x) \in B_i$, δηλ. $x \in f^{-1}(B_i)$. Επομένως $x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$. Επομένως η $\{f^{-1}(B_i)\ i \in I\}$ είναι

διαμέριση του $X$.

Αg Φυλ#5.

Έστω $f: X \to Y$ μια 1-1 και επί συνάρτηση και $\{A_i\ i \in I\}$ μια διαμέριση του $X$.

Γράφω πιο αναλυτικά την εκφώνηση

Από την υπόθεση $\alpha_1)$ $A_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$
$\beta_1)$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i,j \in I$ με $i \neq j$
$\gamma_1)$ $X = \bigcup_{i \in I} A_i$

Θέλαμε νδο η $\{f(A_i)\ i \in I\}$ είναι διαμέριση του $Y$
δηλ. ότι
α) $f(A) \neq \emptyset$ $\forall i \in I$
β) $f(A_i) \cap f(A_j) = \emptyset$ $\forall i,j \in I$ με $i \neq j$
γ) $Y = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

Απόδ
α) Έστω $i \in I$, $\exists x \in A_i$ άρα $f(x) \in f(A_i)$ έτσι $f(A_i) \neq \emptyset$
β) Έστω $i,j \in I$ με $i \neq j$. $f(A_i) \cap f(A_j) = f(A_i \cap A_j) =$
$= f(\emptyset) = \emptyset$.
$f$ είναι 1-1

γ) Αν $x=0$
Αν $y\in\mathbb{Z}$ $0<y<1$
τότε $y\in\mathbb{N}$ με $y<1$, άτοπο

→ Αν $x\in\mathbb{N}$
$x<y<x+1$, $y\in\mathbb{Z}$
τότε $y>x>0$, άρα $y\in\mathbb{N}$. άτοπο

→ Αν $x=-n$ με $n\in\mathbb{N}$
αν $n=1$ $-1<y<0$ με $y\in\mathbb{Z}$
$\Rightarrow 0<-y<1$ με $-y\in\mathbb{N}$.

αν $n>1$ τότε $n-1\in\mathbb{N}$, $n-1<-y<n$

$-n<y<-n+1$.

$(n-1)<-y<(n-1)+1$
$-y\in\mathbb{N}$
$n-1\in\mathbb{N}$ άτοπο

<u>Πρόταση</u>: Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

<u>Απόδ</u>: Έστω $A$ μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$
Υπάρχει $x\in\mathbb{R}$, $x\leq a$ $\forall a\in A$.
Από την αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$
$\exists n\in\mathbb{N}$ με $n>-x \Rightarrow -n<x$
Άρα $-n<a$ $\forall a\in A \Rightarrow 0<n+a$ $\forall a\in A$
Θέτουμε $B=\{n+a \ a\in A\}$
Το $B$ είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$, άρα έχει ελάχιστο στοιχείο
δηλ. $\exists \gamma\in A$ τ.ω. $n+\gamma\leq n+a$ $\forall a\in A$.

## Πρόταση

$x+y \in \mathbb{Z}$

$x \cdot y \in \mathbb{Z}$

$x-y \in \mathbb{Z}$

α) Για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$, ισχύει ότι το άθροισμά τους, το γινόμενο και η διαφορά τους, είναι και οι τρεις ακέραιοι.

β) Οι φυσικοί είναι ακριβώς ακέραιοι. $\mathbb{N} = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ δεν υπάρχει $y \in \mathbb{Z}$ με $x < y < x+1$.

## Απόδ

α) $x = \alpha - \beta$ $\quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$

$y = \gamma - \delta$

Άρα $x+y = \underbrace{(\alpha+\gamma)}_{\mathbb{N}} - \underbrace{(\beta+\delta)}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$

$$xy = (\underbrace{\underbrace{\alpha\gamma}_{\mathbb{N}} + \underbrace{\beta\delta}_{\mathbb{N}}}_{\mathbb{N}}) - \underbrace{(\beta\gamma + \alpha\delta)}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = \underbrace{(\alpha+\delta)}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{(\beta+\gamma)}_{\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$$

β) Άμεσο από τον ορισμό.